مکانیک سیالات یک

فصل دوم

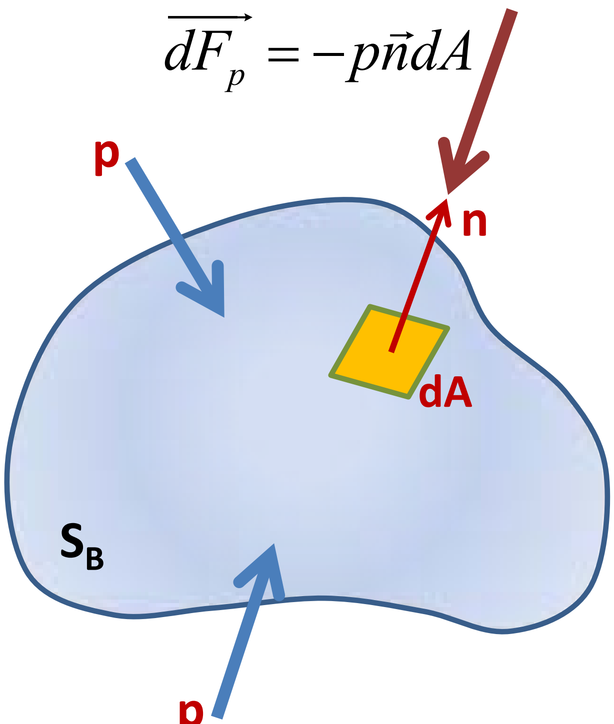
استاتیک سیال و فشار

فشار هیدرواستاتیک وارد بر سطوح

❖ در سیال ساکن، تنش برشی برابر صفر بوده و تنها تـنش موجـود، تـنش عمـودی یعنی فشار p می باشد.

❖ یادآوری: بیان شد که فشار کمیتـی اسـکالر بـوده و در تمـاس بـا سـطح جامـد، نیروی عمودی بر آن وارد می کند.

$$\overrightarrow{dF_p} = -p\vec{n}dA$$



$$\overrightarrow{F_p} = -\int p\vec{n}dA$$

❖ برای سطح صاف: $\vec{n}$ بردار ثابتی است، به نحوی که می توان بصورت جداگانه انـدازه و راسـتای اثـر نیروی F_p را در نظر گرفت.

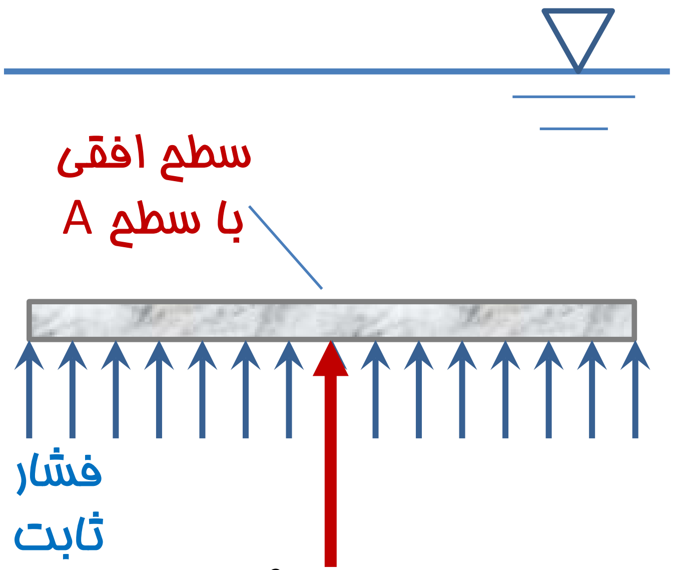
$$\left|\overrightarrow{F_p}\right| = F = \int_A pdA$$

❖ راستا و جهـت اثـر ایـن نیـرو در جهـت عمـود و بسمت سـطح مـی باشـد کـه بـه مرکـز فشار آن (x_{cp}, y_{cp}) وارد می شود.

فشار هیدرواستاتیک وارد بر روی سطوح صاف افقی

❖ در این مبحث تا مادامی که اعلام نشده، فرض می شود که p_{atm} بر سطح سیال وارد می شود. همچنین در ادامه محاسبات، فشار نسبی در نظر گرفته می شود: یعنی: $p = 0$ در سطح سیال.

$$\vec{F}_p = -\int p\vec{n}dA$$



$$F = \int pdA = pA$$

❖ برای سطح صاف: $\vec{n}$ بردار ثابتی است، به نحوی که می توان اندازه و راستای اثر نیروی F_p را بصورت جداگانه تعیین نمود.

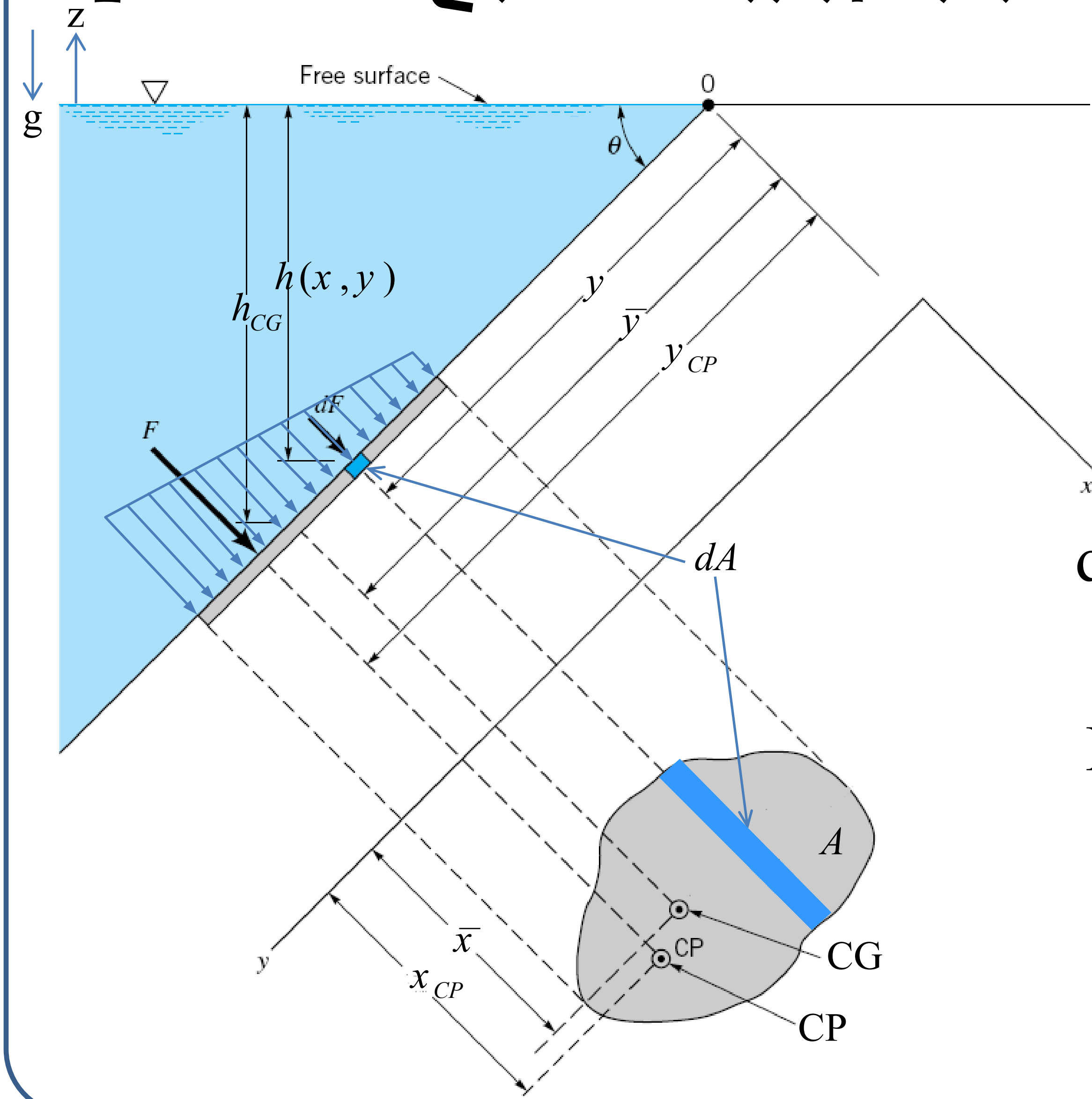
$$\left|\vec{F}_p\right| = F = \int_A pdA$$

❖ راستا و جهت اثر این نیرو در جهت عمود بر سطح و بسمت آن می باشد که به مرکز فشار سطح (x_{cp}, y_{cp}) وارد می شود.

❖راستای اثر این نیرو از مرکز سطح می گذرد:

$$(x_{CP}, y_{CP}) = (\bar{x}, \bar{y})$$

فشار هیدرواستاتیک وارد بر روی سطوح صاف مایل



❖ رابطه اساسی فشار:

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma$$

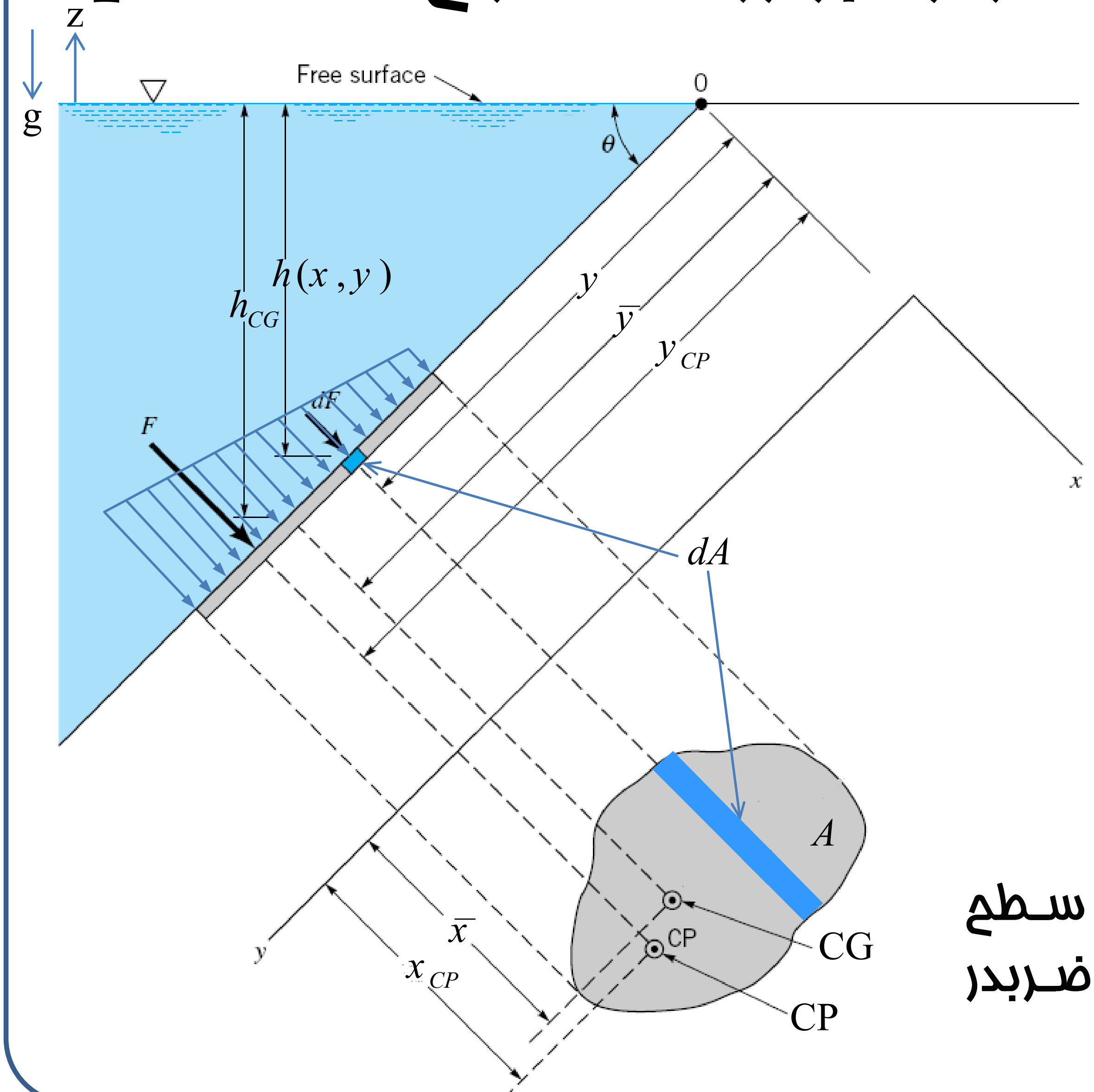
$$\Delta p = -\gamma \Delta z$$

$$dF = pdA = \underbrace{\gamma y \sin\alpha}_{p} dA$$

$$F = \int_A pdA = \gamma \sin\alpha \underbrace{\int_A ydA}_{\bar{y}A}$$

❖ γ و sinα مقادیر ثابت اند.

فشار هیدرواستاتیک وارد بر روی سطوح صاف مایل



$$F=\int_A p\,dA=\gamma\sin\alpha\underbrace{\int_A y\,dA}_{\bar{y}A}$$

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\underbrace{\int_A y\,dA}_{\text{1st moment of area}}$$

$$F=\underbrace{\gamma\sin\alpha\,\bar{y}}_{\bar{p}=\text{ pressure at centroid of }A}\;A$$

$$\boxed{F=\bar{p}A}$$

❖ اندازه برآیند فشار وارد بـر سـطح برابر فشار وارد بر مرکز فشار ضـربدر مساحت سطح است.

تعیین مرکز فشار در سطوح صاف مایل

❖ مرکز فشار در حالت کلی پائین تر از مرکز سطح قرار دارد. (زیرا فشار با عمق افزایش می یابد.)

❖ مرکز فشار ازمساوی قرار دادن گشتاورهای نیروی برآیند فشار و نیروی توزیع فشار حول محورهای دلخواه محاسبه می شود.

❖ تعیین y_{cp}:

❖ محاسبه گشتاور وارد به صفحه حول محور x:

$$y_{cp}F = \int_A y\,dF$$

$$= \int_A yp\,dA = \int_A y(\gamma y \sin\alpha)\,dA = \gamma \sin\alpha \underbrace{\int_A y^2\,dA}_{I_o}$$

❖ $I_{\circ}$ گشتاور دوم سطح حول محور x (گشتاور اینرسی)

تعیین مرکز فشار در سطوح صاف مایل

❖ تعیین y_{cp} بر حسب ممان سطح:

$$y_{cp}F = \gamma \sin\alpha I_o \xrightarrow{F=\bar{p}A} y_{cp}\gamma \sin\alpha \bar{y}A = \gamma \sin\alpha I_o$$

$$y_{cp} = I_o / \bar{y}A$$

❖ رابطه انتقال محور دوران:

$$I_o = \bar{y}^2 A + \bar{I}$$

❖ که :

$\bar{I}$ = ممان اینرسی سطح نسبت به محور افقی عبوری از مرکز سطح

$$y_{cp}\gamma \sin\alpha \bar{y}A = \gamma \sin\alpha\left(\bar{y}^2 A + \bar{I}\right) \quad \rightarrow \quad y_{cp}\bar{y}A = \bar{y}^2 A + \bar{I}$$

$$\boxed{y_{cp} = \bar{y} + \bar{I}/\bar{y}A}$$

❖ y_{cp} به اندازه $\bar{I}/\bar{y}A$ پائین تر از مرکز سطح قرار دارد.

❖ برای $p_o \neq 0$، y باید از سطح آزاد معادل محاسبه شود که به اندازه p_o/γ بالاتر از قرار دارد. همچنین:

$$y_{cp} \rightarrow \bar{y} \text{ for large } \bar{y}$$

تعیین مرکز فشار در سطوح صاف مایل

❖ تعیین x_{cp}:

❖ محاسبه گشتاور وارد به صفحه حول محور y:

$$x_{cp}F = \int_A x\,dF$$

$$= \int_A xp\,dA = \int_A x(\gamma y \sin\alpha)\,dA = \gamma \sin\alpha \underbrace{\int_A xy\,dA}_{I_{xy}}$$

❖ I_{xy} گشتاور حاصلضرب سطح.

❖ رابطه انتقال محور دوران:

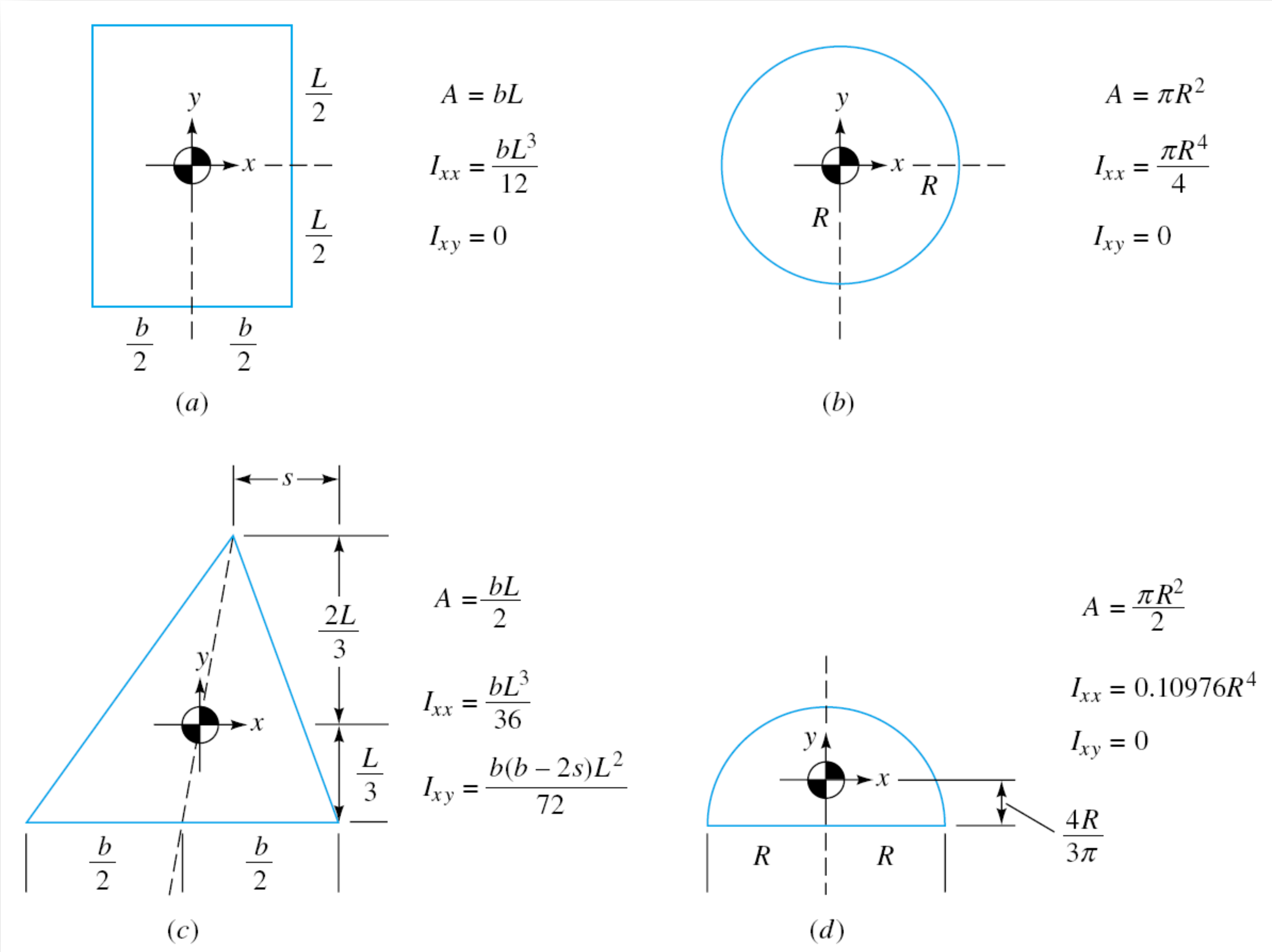
$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x}\bar{y}A$$

$$x_{cp}\bar{y}A = \bar{I}_{xy} + \bar{x}\bar{y}A \quad \rightarrow \quad x_{cp} = \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y}A} + \bar{x}$$

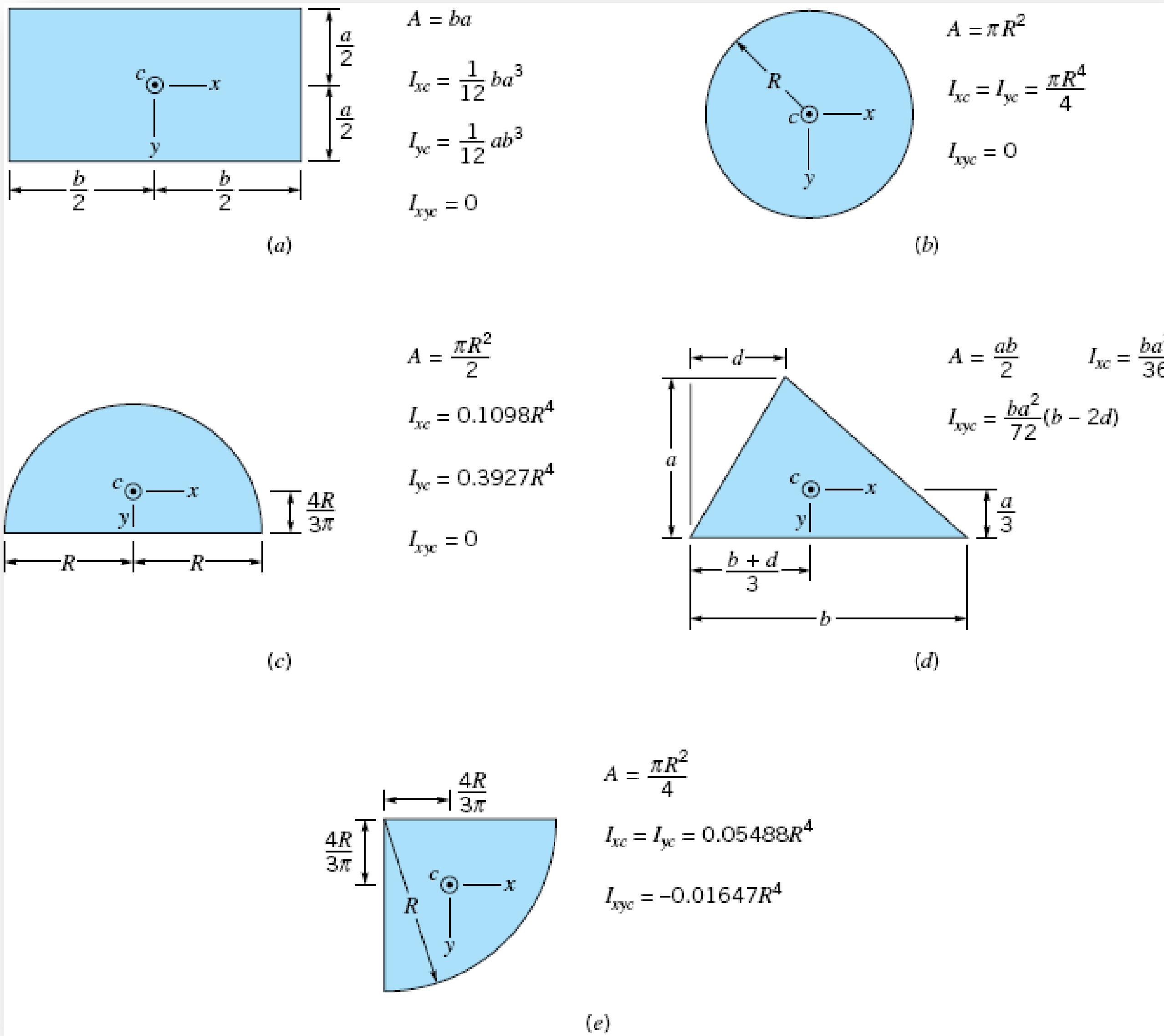
❖ برای صفحات صاف متقارن نسبت به محور عمود بر محور x :

$$\bar{I}_{xy} = 0 \rightarrow x_{cp} = \bar{x}$$

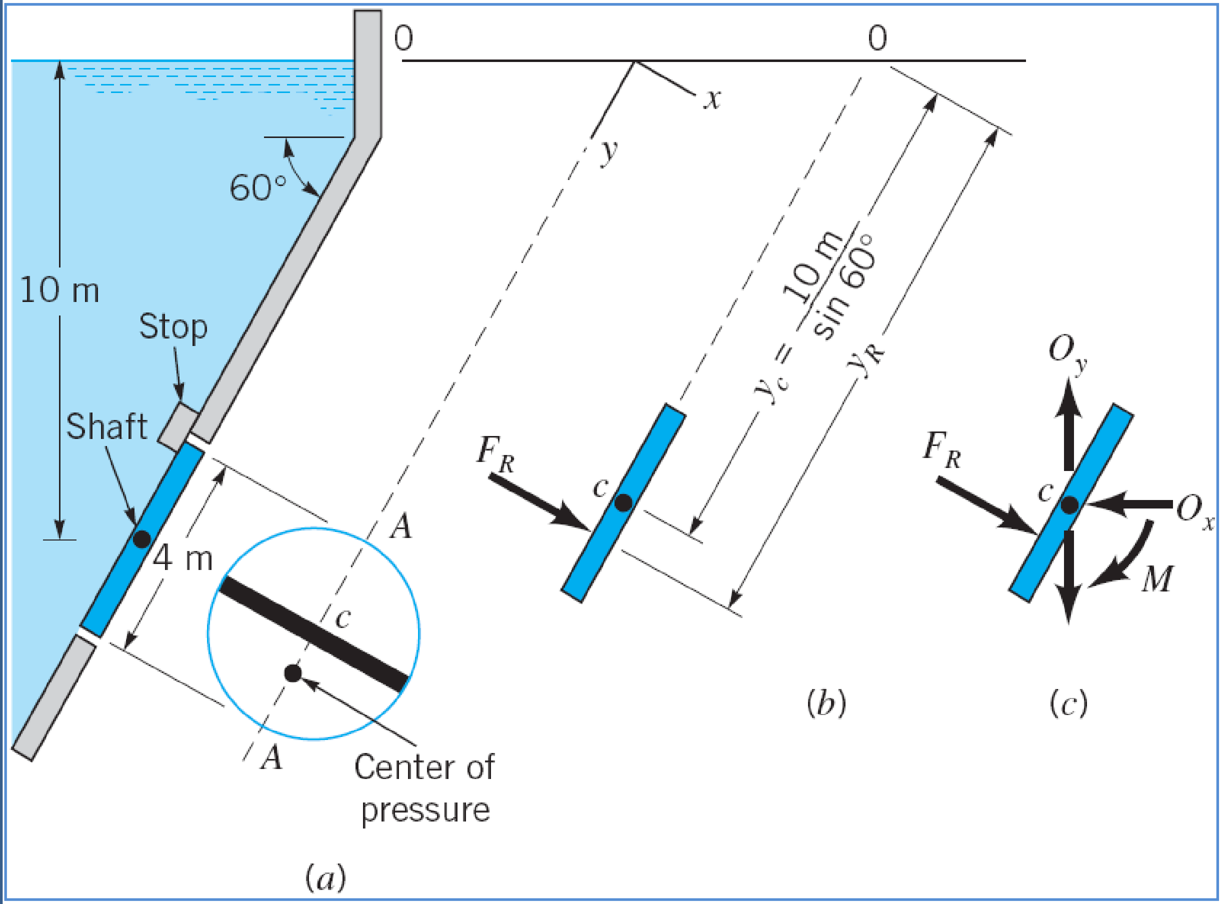
مشخصات (برخی از) سطوح هندسی



مشخصات (برخی از) سطوح هندسی



مثال: فشار وارد بر سطوح صاف مایل



❖ دریچه دایره ای شکلی به قطر 4 m مطابق شکل بر روی سطح مایل مخزن آب بزرگی نصب شده است. دریچه بر روی شافتی که بطور افقی از مرکز آن می گذرد نصب شده است. برای شرایط ارتفاع آب 10 m تا شافت، مطلوبست:
الف) اندازه و محل اثر برآیند نیروی فشار،

❖ ب) گشتاور لازم برای باز نمودن دریچه.

مثال: فشار وارد بر سطوح صاف مایل

❖ حل:الف)

$$F = \gamma h_{CG} A = \left(9.80 \times 10^3\ \mathrm{N/m^3}\right)(10\mathrm{m})\left(4\pi \mathrm{m}^2\right) = 1.23\mathrm{MN}$$

$$x_{cp} = \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y}A} + \bar{x} \xrightarrow{\bar{I}_{xy}=0} x_{cp} = \bar{x}$$

$$y_{cp} = \frac{\bar{I}_{xx}}{\bar{y}A} + \bar{y} \xrightarrow{\bar{I}_{xx}=\pi R^4/4} y_{cp} = \frac{\pi(2\mathrm{m})^4/4}{\left(10\mathrm{m}/\sin 60^\circ\right)\left(4\pi \mathrm{m}^2\right)} + \frac{10\mathrm{m}}{\sin 60^\circ}$$

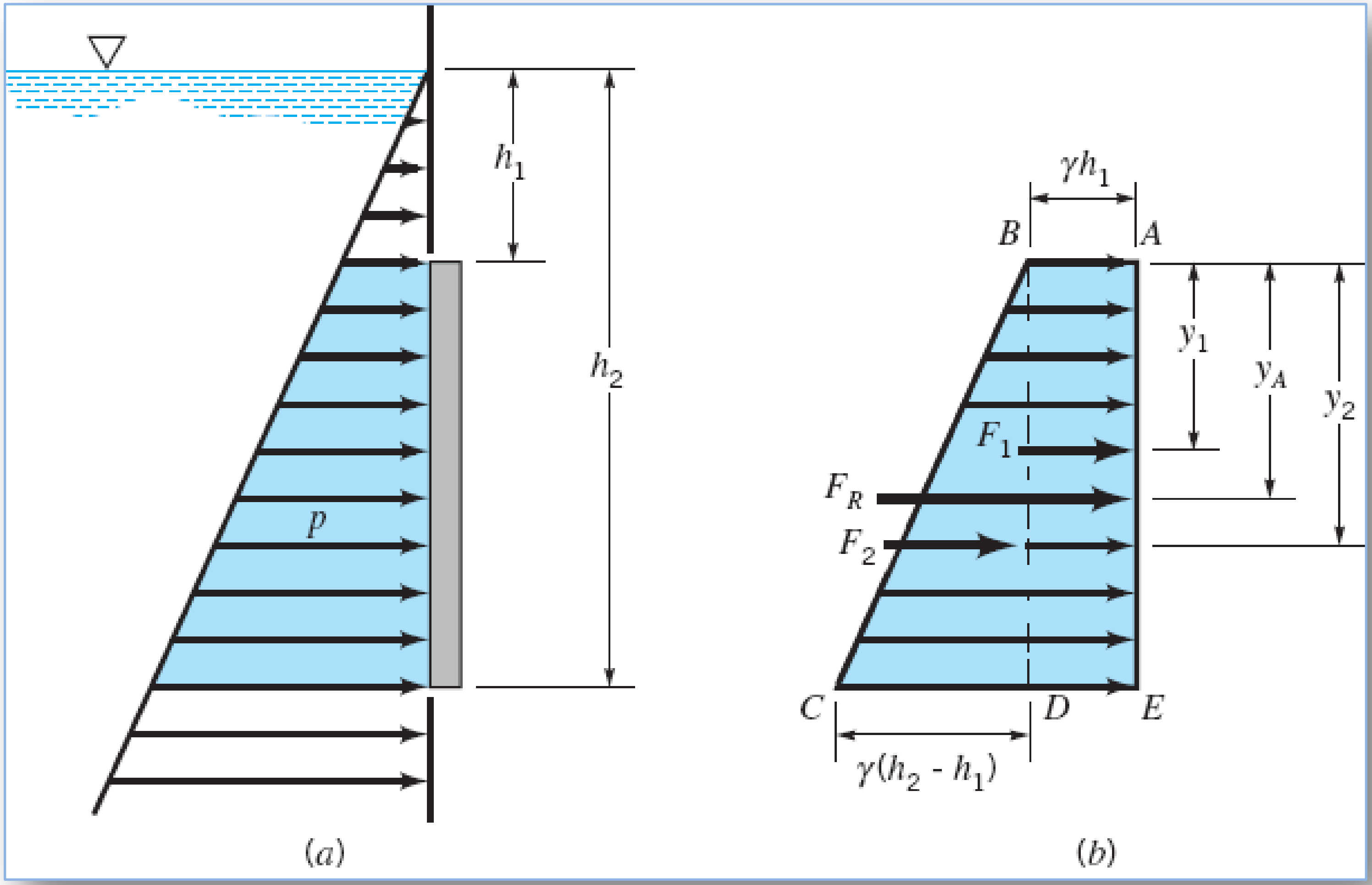
$$y_{cp} = 11.6\mathrm{m} \qquad y_{cp} - \bar{y} = 0.0866\mathrm{m}$$

❖ ب)

$$\sum M_c = 0 \rightarrow M = F\left(y_{cp} - \bar{y}\right)$$

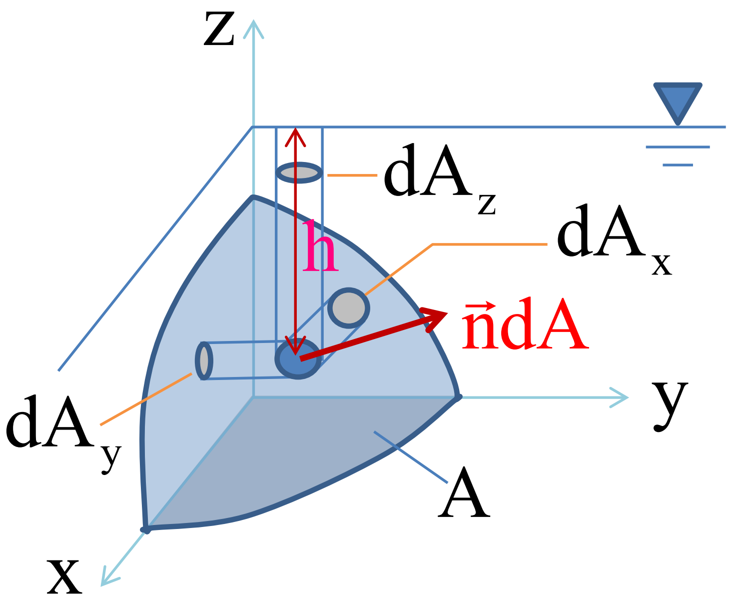
$$M = \left(1230 \times 10^3\mathrm{N}\right)(0.0866\mathrm{m}) = 1.07 \times 10^5\ \mathrm{Nm}$$

محاسبه نقطه اثر نیروی فشار وارد بر سطوح صاف



$$F_R = F_1 + F_2, \qquad F_R y_A = F_1 y_1 + F_2 y_2$$

فشار هیدرواستاتیک بر روی سطوح منحنی



❖ معادله اساسی فشار:

$$p = \gamma h$$

h فاصله از سطح آزاد سیال:

$$\vec{F} = -\int_A p\vec{n}\,dA$$

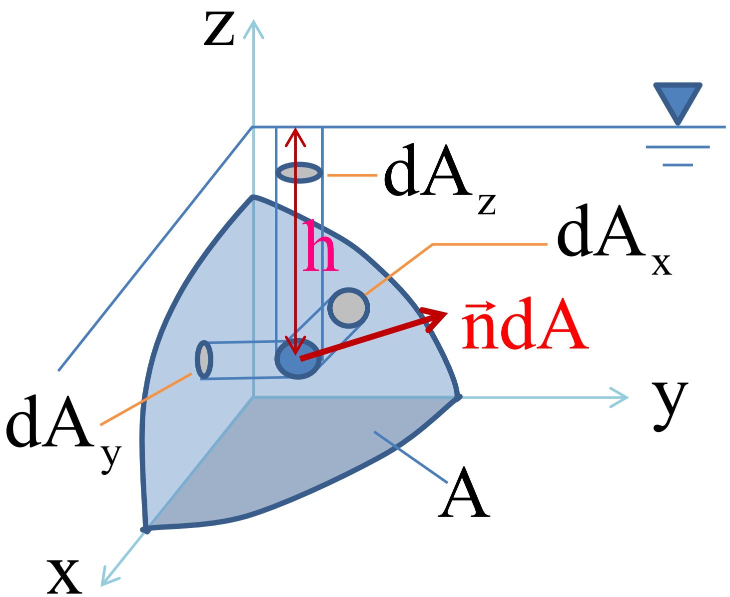
❖ مؤلفه های افقی (x و y) نیروی فشار:

$$F_x = \vec{F}\cdot\hat{i} = -\int_A p\vec{n}\cdot\hat{i}\,dA$$

$$= -\int_{A_x} p\,dA_x$$

dA_x = projection of $\vec{n}dA$ onto plane $\perp$ to x – dirction

فشار هیدرواستاتیک بر روی سطوح منحنی



❖ مؤلفه های افقی (x و y) نیروی فشار:

$$F_y = \vec{F} \cdot \hat{j} = -\int_{A_y} p dA_y$$

$$dA_y = \vec{n} \cdot \hat{j} dA$$

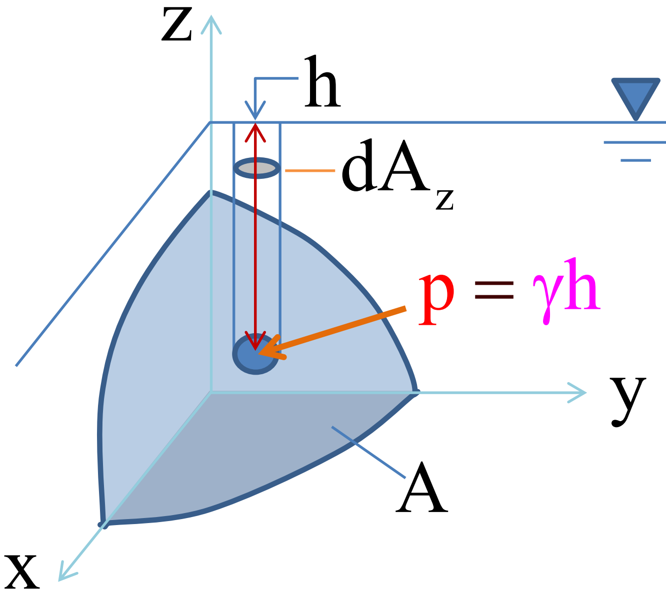
$$dA_y = \text{projection of } \vec{n}dA$$

$$\text{onto plane} \perp \text{to } y - \text{dirction}$$

❖ ملاحظه می شود که: مؤلفه های افقی نیروی فشاری با استفاده از روش بیان شده قبلی برای صفحات غوطه ور در سیال قابل محاسبه اند.

❖ مؤلفه های افقی فشار بر روی سطوح منحنی برابر نیروی وارد بر تصویر قائم سطح در راستا و اندازه مورد نظر می باشد.

فشار هیدرواستاتیک بر روی سطوح منحنی



❖ مؤلفه قائم (z) نیروی فشار:

$$F_z = \vec{F}\cdot\hat{k} = -\int_A p\vec{n}\cdot\hat{k}dA$$

$$= \int_{A_z} pdA_z \qquad p = \gamma h$$

$h =$ distance below free surface

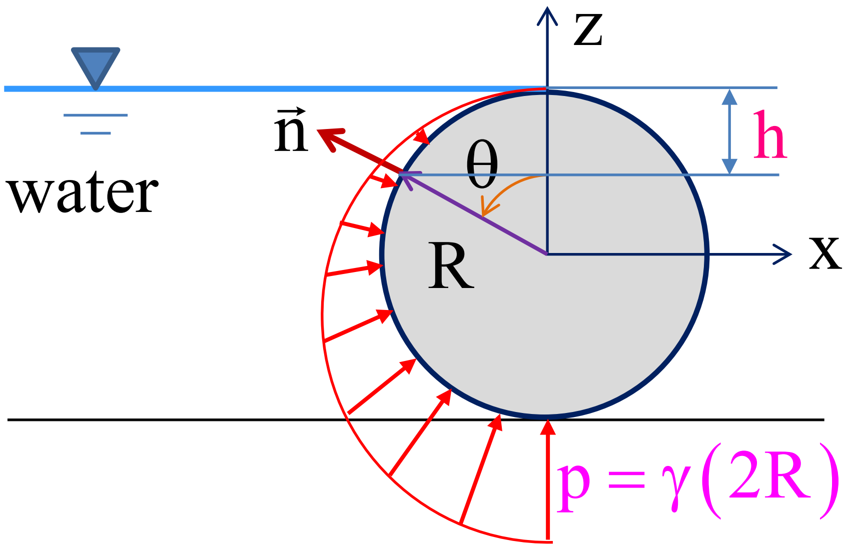
$$F_z = \gamma\int_{A_z} hdA_z = \gamma V$$

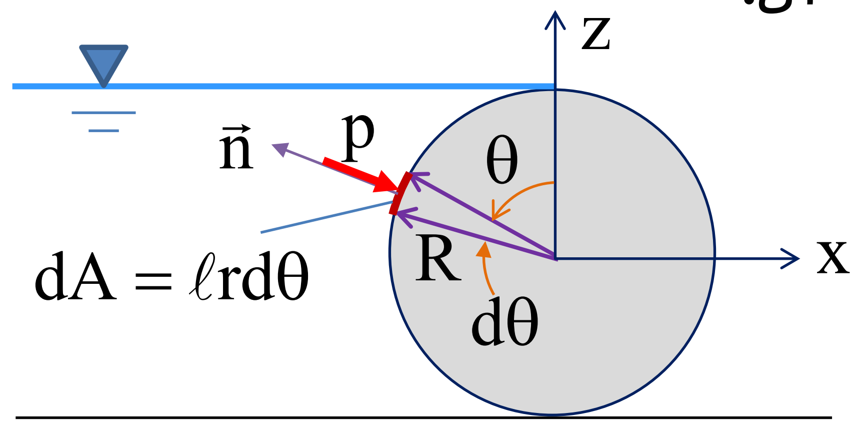
❖ که برابر وزن سیال بالای سطح A می باشد.

❖ مؤلفه قائم فشار وارد بر روی سطح منحنی برابر وزن خالص ستون سیال بالای سطح منحنی در راستای مرکز حجم سیال مورد نظر است.

مثال: فشار هیدرواستاتیک بر روی سطوح منحنی

❖ دریچه استوانه ای به طول l و شعاع R . نیروی فشار وارد بر دریچه و نقطه اثر آن.





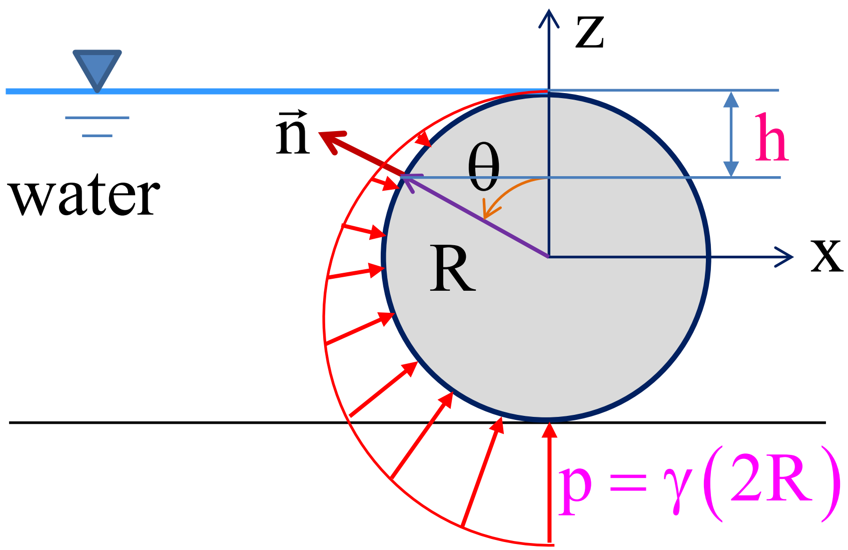
❖ منحنی فشار :

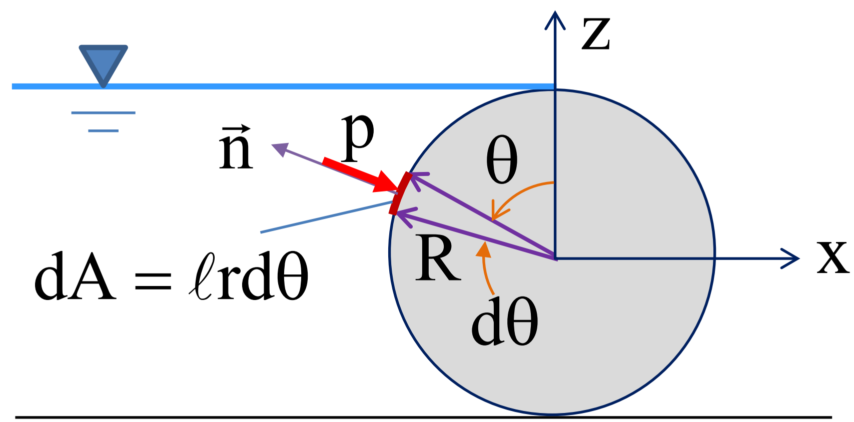
$$\vec{n}=-\sin\theta\hat{i}+\cos\theta\hat{k}$$

$$p=\gamma h=\gamma R(1-\cos\theta)$$

$$\vec{F}=-\int_0^{\pi}\gamma R(1-\cos\theta)\underbrace{\left(-\sin\theta\hat{i}+\cos\theta\hat{k}\right)}_{\vec{n}}\underbrace{\ell R d\theta}_{dA}$$

مثال: فشار هیدرواستاتیک بر روی سطوح منحنی





❖ مؤلفه x نیروی فشار:

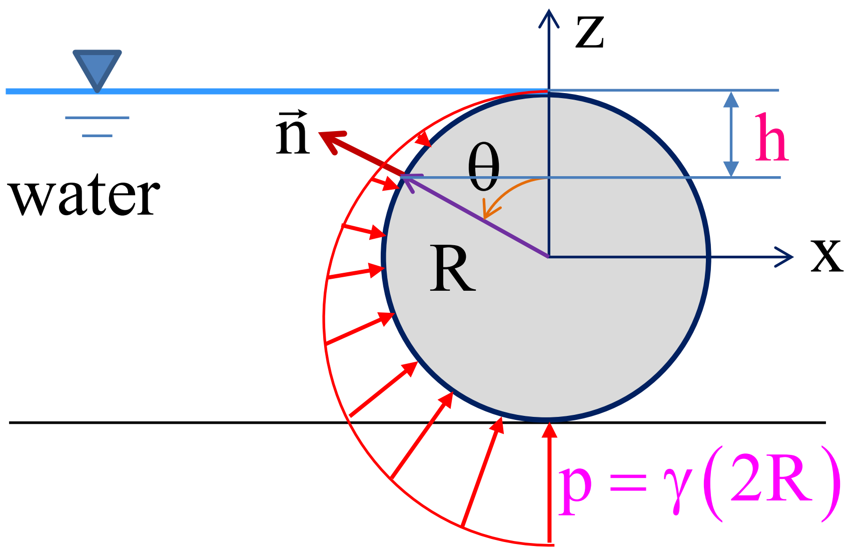
$$\vec{F}\cdot\hat{i} = F_x = +\gamma\ell R^2\int_0^{\pi}(1-\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

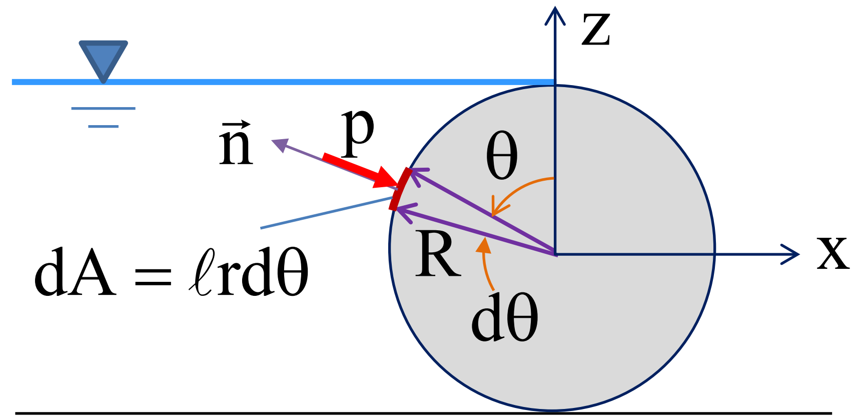
$$\vec{F}\cdot\hat{i} = F_x = \gamma\ell R^2\left[-\cos\theta+\tfrac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\pi} = 2\gamma\ell R^2$$

$$= \underbrace{(\gamma R)}_{\bar{p}}\underbrace{(2R\ell)}_{A}$$

❖ که برابر متوسط فشار در تصویر سطح در راستای محور x است.

مثال: فشار هیدرواستاتیک بر روی سطوح منحنی





❖ مؤلفه z نیروی فشار:

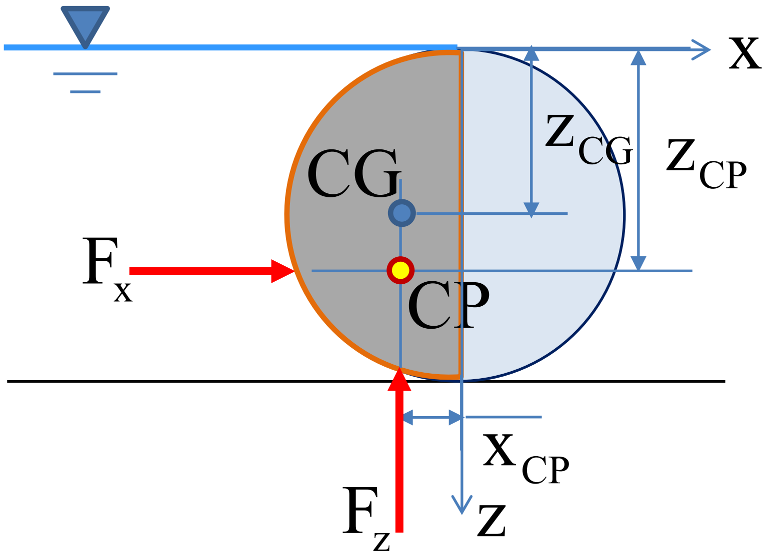
$$\vec{F}\cdot\hat{k}=F_z=-\gamma\ell R^2\int_0^{\pi}(1-\cos\theta)\cos\theta d\theta$$

$$\vec{F}\cdot\hat{k}=F_z=-\gamma\ell R^2\left[\sin\theta-\tfrac{\theta}{2}+\tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}=\tfrac{1}{2}\pi\gamma\ell R^2$$

$$=\gamma\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\pi R^2\ell\right)}_{\forall}=\gamma\forall$$

❖ که برابر وزن خالص سیال بالای سطح است.

مثال: فشار هیدرواستاتیک بر روی سطوح منحنی



❖ مختصات مرکز فشار:

$$z_{CP} = z_{CG} + \frac{I_{CG}}{z_{CG} A}$$

$$z_{CP} = R + \frac{\ell (2R)^3 / 12}{R (2R\ell)}$$

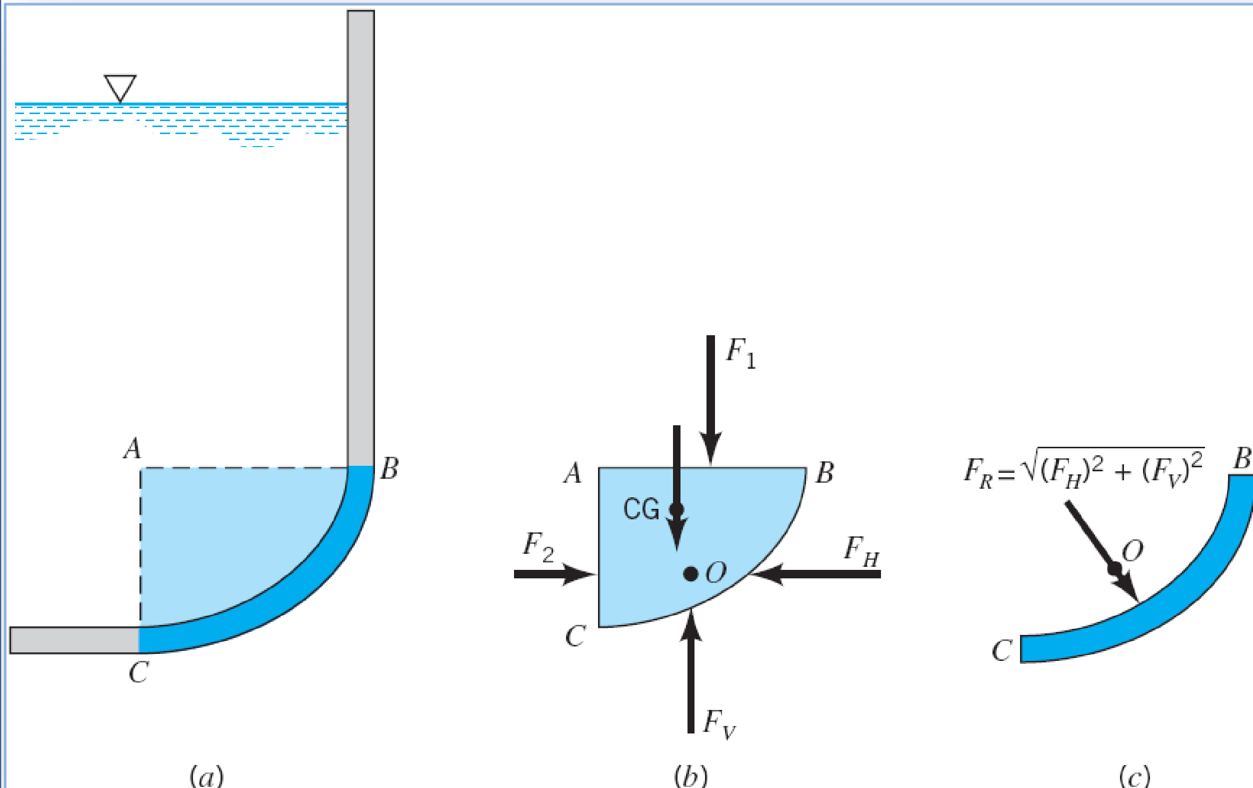
$$z_{CP} = 4R/3 \qquad x_{CP} = z_{CV} = 4R/(3\pi)$$

❖ و برآیند نیروی فشار و راستای اثر آن:

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_z \hat{k} = 2\gamma\ell R^2 \hat{i} + (1/2)\pi\gamma\ell R^2 \hat{k}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(F_z/F_x) = \tan^{-1}\left(0.5\pi\gamma\ell R^2 / 2\gamma\ell R^2\right) = \tan^{-1}(\pi/4) = 38.2^\circ$$

فشار هیدرواستاتیک بر روی سطوح منحنی



❖ محاسبه برآیند نیروی فشار بر روی سطح منحنی BC.

❖ با توجه به دیاگرام جسم آزاد حجم سیال محدود شده توسط سطح مورد نظر می توان از تعادل نیروها، نیروی برآیند را محاسبه نمود.

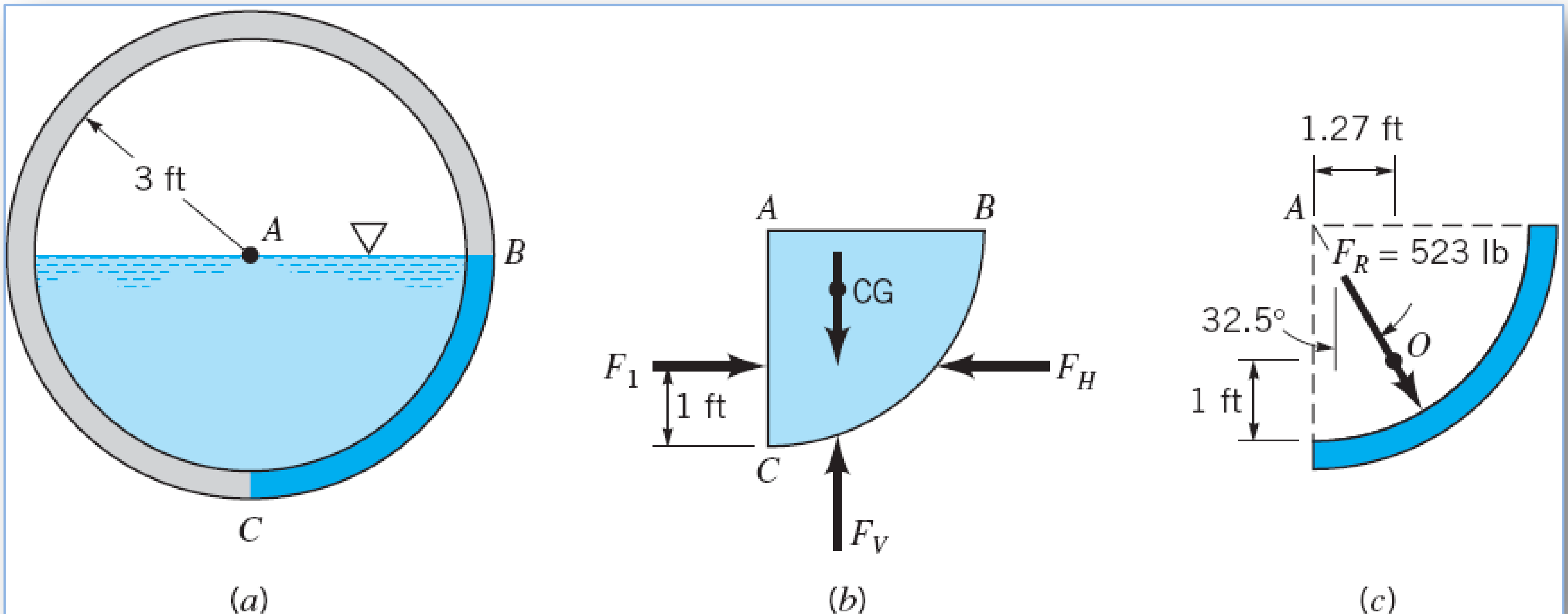
❖ با محاسبه گشتاور حول نقطه دلخواه، نظیر A، نقطه اثر نیروی برآیند را می توان محاسبه نمود.

$$\begin{cases} F_H = F_2 \\ F_V = F_1 + W \end{cases} \rightarrow F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$$

فشار هیدرواستاتیک بر روی سطوح منحنی

❖ قطر کانال استوانه ای ′6 ، هدف محاسبه برآیند نیروی وارد به کمان BC بـه ازأ واحد طول آن.

❖ حل: با توجه به دیاگرام جسم آزاد سیال محصور توسط سطح مذکور:



فشار هیدرواستاتیک بر روی سطوح منحنی

$$F_1 = \gamma h_{CG} A = \left(62.4\,\mathrm{lb/ft^3}\right)\left(\tfrac{3}{2}\,\mathrm{ft}\right)\left(3\mathrm{ft^2}\right) = 281\,\mathrm{lb}$$

$$W = \gamma \forall = \left(62.4\,\mathrm{lb/ft^3}\right)\left(\tfrac{9\pi}{4}\,\mathrm{ft^2}\right)\left(1\mathrm{ft}\right) = 441\,\mathrm{lb}$$

$$F_H = F_1 = 281\,\mathrm{lb} \qquad F_V = W = 441\,\mathrm{lb}$$

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{(281\ \mathrm{lb})^2 + (441\ \mathrm{lb})^2} = 523\,\mathrm{lb}$$

- نیروی سیال وارد بر دریچه برابر F_R و مخالف آن می باشد.
- برای راستای نیروی برآیند:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(F_V / F_H\right) = \tan^{-1}\left(-441/281\right) = -57.5^\circ$$

پایان